EXERCICE N1

I. Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$.

1. $x\in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3\geq 0 \text{ toujours vrai} \\ et \\ x-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\neq 1 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\setminus\{1\} \Leftrightarrow D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$.

2. Soit $x\neq 1$, on a : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\dfrac{x^2+3-4}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}\Rightarrow$

$$f(x)=\frac{x^2-1}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}.$$

* Montrons que f est majorée par 1.

$x^2<x^2+3\Rightarrow |x|<\sqrt{x^2+3}$ et puisque $x\leq|x| \Rightarrow x<\sqrt{x^2+3}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

De plus on a : $1<2$, en additionnant membre à membre les deux inégalités, on aura :

$x+1<\sqrt{x^2+3}+2\Rightarrow f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}<1$.

3. $\lim\limits_{1} f=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

$\Rightarrow f$ est prolongeable par continuité en 1 et on a : $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & si\ x\neq 1\\ \dfrac{1}{2} & si\ x=1\end{cases}$ est le prolongement par continuité de f en 1.

II. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-1}{2-x} & si\ x\in\left]-\infty,0\right[\\ x^3+x-\dfrac{3}{2} & si\ x\in[0,1]\\ \dfrac{\sqrt{x^2+3}\ -\ 2}{x\ -\ 1} & si\ x\in\left]1,+\infty\right[\end{cases}$.

1. * Continuité de g en 0 : $g(0)=0^3+0-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{3}{2}$.

$\lim\limits_{0^-}g=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2x-1}{2-x}=-\dfrac{1}{2}\neq g(0)\Rightarrow$ g est discontinue à gauche en 0.

$\lim\limits_{0^+}g=\lim\limits_{x\to0^+}x^3+x-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{3}{2}=g(0)\ \Rightarrow$ g est continue à droite en 0.

Ainsi g n'est pas continue en 0.

* Continuité de g en 1 : $g(1)=1^3+1-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{1^-}g=\lim\limits_{x\to1^-}x^3+x-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}=g(1)\Rightarrow$ g est continue à gauche en 1.

$\lim\limits_{1^+}g=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x^2+3}\ -\ 2}{x\ -\ 1}=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\dfrac{1}{2}=g(1)\Rightarrow$ g est continue à droite en 1.

Ainsi g est continue en 1.

2. $\lim\limits_{+\infty}g=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}\ -\ 2}{x\ -\ 1}\left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$: Forme indéterminée.

$\Rightarrow\lim\limits_{+\infty}g$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}-2}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}-2}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}-\frac{2}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}-\frac{2}{x}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}\right)}=1.$$

$\Rightarrow\left(C_g\right)$ admet au voisinage de $+\infty$, une asymptote horizontale d'équation y = 1.

3. a) $\lim\limits_{-\infty}g=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{2-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{-x}=-2\Rightarrow\Delta:y=-2$ est une asymptote à $\left(C_g\right)$ au voisinage de $-\infty$.

b) Soit $x\in\left]-\infty,0\right[$, on a : $\dfrac{2x-1}{2-x}-(-2)=\dfrac{2x-1+4-2x}{2-x}=\dfrac{3}{2-x}>0$, $\forall x\in\left]-\infty,0\right[$

$\Rightarrow\left(C_g\right)$ est située au dessus de Δ sur $\left]-\infty,0\right[$.

4. $g(x)=x^3+x-\frac{3}{2},\ \forall x\in[0,1]$.

* g est la restriction d'une fonction polynôme continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0,1]$.

* $g(0)=-\frac{3}{2}<0$.

* $g(1)=\frac{1}{2}>0$.

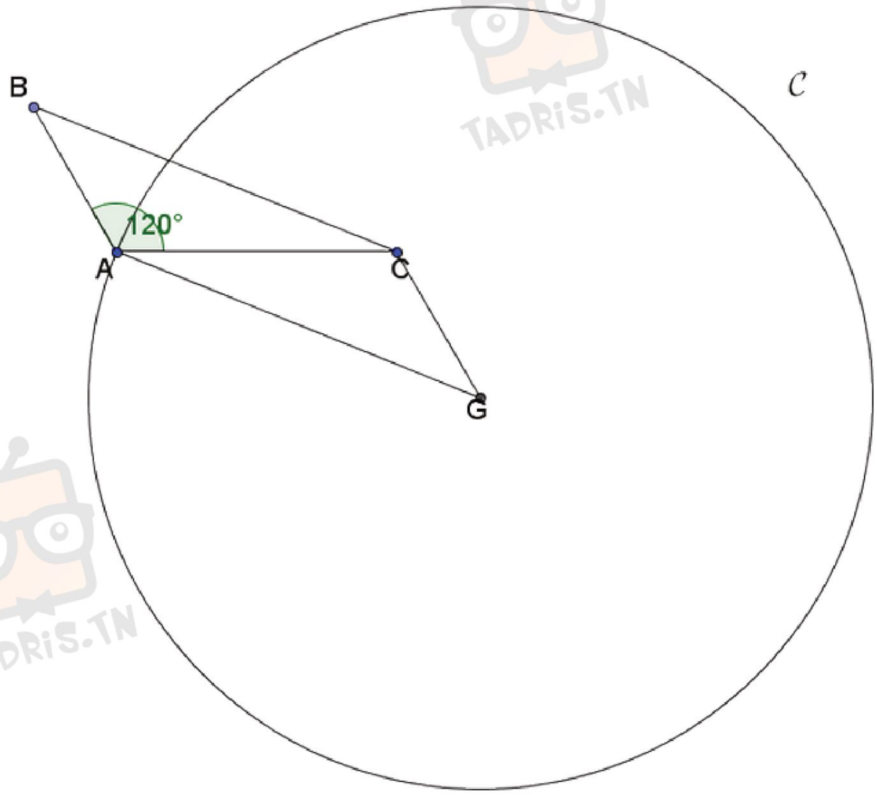
$\Rightarrow$ il existe au moins un réel $\alpha\in]0,1[$ tel que : $g(\alpha)=0$.

5. $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^3+x-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^3+x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x^2+x+2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}x^2+x+2=4$.

EXERCICE N2

Soit ABC un triangle tel que : AB = 3, AC = 5 et $\hat{A}=\frac{2\pi}{3}$.

1.



2. $\overline{AB}\cdot\overline{AC}=AB\times AC\times\cos B\hat{A}C=3\times5\times\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{15}{2}$.

D'après la formule d'ELKASHY appliqué dans le triangle ABC, on a :

$BC^2=AB^2+AC^2-2\overline{AB}\cdot\overline{AC}=9+25+15=49\Rightarrow$ BC = 7.

3. $\overline{BA}\cdot\overline{BC}=\overline{BA}\cdot\left(\overline{BA}+\overline{AC}\right)=\overline{BA}\cdot\overline{BA}+\overline{BA}\cdot\overline{AC}=BA^2-\overline{AB}\cdot\overline{AC}=9+\frac{15}{2}=\frac{33}{2}$.

4. a) Soit G le barycentre des points pondérés (A, 1) ; (B, -1) et (C, 1).

$\Rightarrow \overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AG}=\overrightarrow{BC} \Rightarrow$ ABCG est un parallélogramme.

b) $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ car ABCG est un parallélogramme.

$\left\|\overrightarrow{BG}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=9+49+33=91 \Rightarrow BG=\sqrt{91}$.

c) $MA^2-MB^2+MC^2=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2-\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2=$

$MG^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\underbrace{\left(\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)}_{\vec{0}}+GA^2-GB^2+GC^2$. or GA = BC = 7, $BG=\sqrt{91}$ et GC = AB = 3

$\Rightarrow MA^2-MB^2+MC^2=MG^2-33$.

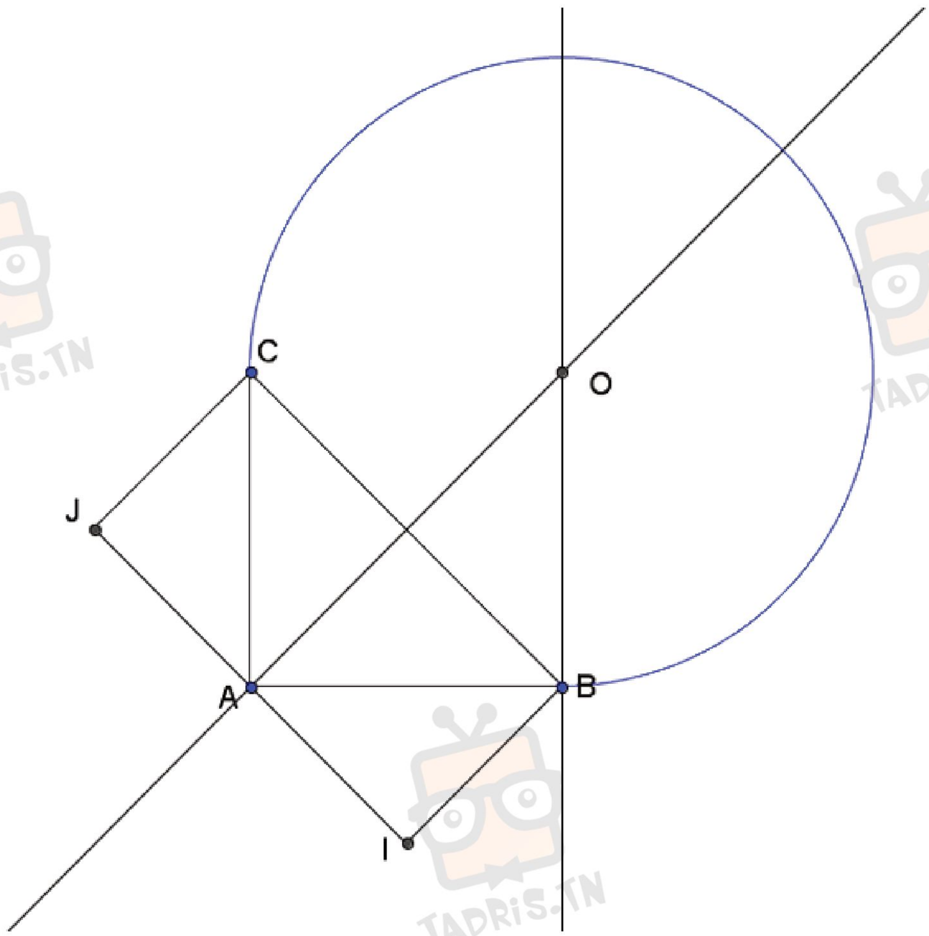
d) $M\in\zeta \Leftrightarrow MA^2-MB^2+MC^2=16 \Leftrightarrow MG^2-33=16 \Leftrightarrow MG^2=49 \Leftrightarrow GM=7$

$\Leftrightarrow M\in\zeta$ le cercle de centre G et de rayon 7.

EXERCICE N3

1. ABC est un triangle isocèle et rectangle en A $\Rightarrow \widehat{ABC}=\widehat{ACB}=\frac{\pi}{4}$, or $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)$ est orienté dans le sens indirect ou négatif $\Rightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}}\right)[2\pi]\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

$-\frac{\pi}{4}\in]-\pi,\pi] \Rightarrow -\frac{\pi}{4}$ est la mesure principale de $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}\right)$.



2. a) $(\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB}}) + (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) + (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AJ}})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}[2\pi] \equiv \pi[2\pi] \Rightarrow$ I, A et J sont alignés.

b) $(\widehat{\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{CB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{CB}})[2\pi]$ car $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IA}$ sont colinéaires de même sens.

$$\equiv (\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}}) + (\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{CB}})[2\pi] \equiv (\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}}) + (\widehat{\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BC}})[2\pi] \equiv -\pi[2\pi] \Rightarrow \overrightarrow{IJ} \text{ et } \overrightarrow{CB} \text{ sont colinéaires}$$

$\Rightarrow$ (IJ) // (BC).

c) $\left.\begin{matrix}(IB)\perp(IJ)\\(JC)\perp(IJ)\end{matrix}\right\} \Rightarrow (IB)//(JC)$, de plus on a : (IJ) // (BC) alors IBCJ est un parallélogramme.

Or $(IB)\perp(IJ)$ donc IBCJ est un rectangle.

3. $M \in \xi \Leftrightarrow (\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}}) \equiv \frac{111\pi}{4}[2\pi]$

$\frac{111\pi}{4} = 28\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{111\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ et par suite on a : $M \in \xi \Leftrightarrow (\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}}) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Ainsi $M \in \xi$ l'arc du cercle ζ passant par B et C, tangent à la demi – droite [Bt) telle que $(\widehat{\overrightarrow{Bt},\overrightarrow{BC}}) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Cet arc ne contient pas les points B et C et il est situé dans le demi plan de frontière (BC) ne contenant pas [Bt).